וקטור קואורדינטות לפי בסיס

משפט נניח כי $\bar{v}_1,\dots,\bar{v}_n \in V$ בסיס של מרחב וקטורי V. אז לכל וקטור $\bar{u}\in V$ ניתן לכתוב בצורה לינארית יחיד של $\bar{v}_1,\dots,\bar{v}_n$

הגדרה: אם $\bar{v}_1,\dots,\bar{v}_n \in V$ בסיס של מרחב וקטורי V ו $\bar{u}\in V$, אז $\bar{u}=k_1\cdot\bar{v}_1+\dots+k_n\cdot\bar{v}_n$. לוקטור $\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$ קורא וקטור קואורדינטות של וקטור $\bar{u}$ לפי בסיס $\bar{v}_1,\dots,\bar{v}_n$

סימון:

$$[\bar{u}]_{v_1,\dots,v_n}=\begin{pmatrix}k_1\\ k_2\\ \vdots\\ k_n\end{pmatrix}$$

דוגמאות:

1. $E=\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$ הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$.

$$\bar{u}=\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 10\end{pmatrix}$$

$$\bar{u}=2\cdot\vec{e}_1+(-1)\cdot\bar{e}_2+10\cdot\bar{e}_3$$

לכן

$$[\bar{u}]_{e_1,e_2,e_3}=\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 10\end{pmatrix}$$

2. $E=\{1,t,t^2\}$ הבסיס הסטנדרטי של $P_2(\mathbb{R})$

$$p(t)=1+8t-5t^2$$

אז

$$p(t)=1\cdot 1+8\cdot t+(-5)\,t^2$$

$$=1\cdot e_1+8e_2-5\cdot e_3$$

Scanned with CamScanner

$$[p(t)]_{e_1 e_2 e_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}$$

תרגיל בהינתן קבוצת הוקטורים

$$B = \left\{ b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

מהווים בסיס של $\mathbb{R}^3$ ומצאו את $[\bar{u}]_B$

כאשר $\bar{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}$

פתרון: נבדוק האם $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3$ בת"ל.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{גיבוס}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

כל הקטורים מובילים לכן $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3$ בת"ל.

$\dim \mathbb{R}^3 = 3$, לכן $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ בסיס של $\mathbb{R}^3$

נמצא את הקואורדינטות של וקטור $\bar{u}$ לפי בסיס B

$$\bar{u} = k_1 b_1 + k_2 b_2 + k_3 b_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{גיבוס}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 19 \\ 0 & 0 & 1 & -9 \end{array}\right)$$

$$[\bar{u}]_B = \begin{pmatrix} 10 \\ 19 \\ -9 \end{pmatrix}$$

שאלה כללית נתונים שני בסיסים של מרחב V:

$B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$, $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$

נתון $[\bar{u}]_B$. צריך למצוא $[\bar{u}]_C$

פתרון: נכתוב את $\bar{u}$ כצירוף לינארי של בסיס B:

$$\bar{u} = x_1 b_1 + \dots + x_n \cdot b_n \Rightarrow [\bar{u}]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

כל וקטור $\bar{b}_i$ $(1 \le i \le n)$ מוגדר כצירוף לינארי של בסיס C לכן

$$\bar{b}_1 = b_{11}\bar{c}_1 + b_{12}\bar{c}_2 + \dots + b_{1n}\bar{c}_n$$

$$\bar{b}_2 = b_{21}\bar{c}_1 + b_{22}\bar{c}_2 + \dots + b_{2n}\bar{c}_n$$

$$\dots$$

$$\bar{b}_n = b_{n1}\bar{c}_1 + b_{n2}\bar{c}_2 + \dots + b_{nn}\bar{c}_n$$

$$\bar{u} = x_1 \cdot (b_{11}\bar{c}_1 + \dots + b_{1n}\bar{c}_n) + x_2 \cdot (b_{21}\bar{c}_1 + \dots + b_{2n}\cdot\bar{c}_n) +$$

$$\dots + x_n \cdot (b_{n1}\bar{c}_1 + \dots + b_{nn}\cdot\bar{c}_n) =$$

$$= (x_1 \cdot b_{11} + x_2 \cdot b_{21} + \dots + x_n \cdot b_{n1}) \cdot \bar{c}_1 +$$

$$+ (x_1 \cdot b_{12} + x_2 \cdot b_{22} + \dots + x_n \cdot b_{n2}) \cdot \bar{c}_2$$

$$+ \dots + (x_1 \cdot b_{1n} + x_2 \cdot b_{2n} + \dots + x_n \cdot b_{nn}) \cdot \bar{c}_n$$

$$[\bar{u}]_C = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & \dots & b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & \dots & b_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{1n} & b_{2n} & & b_{nn} \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{[\bar{u}]_B}$$

Scanned with CamScanner

למטריצה

$$T_{C\leftarrow B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1n} & b_{2n} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

קיבלנו מטריצת המעבר ממסיס B למסיס C

ז"א קיבלנו נוסחה,

$$[\bar{u}]_C = T_{C\leftarrow B} \cdot [\bar{u}]_B$$

כאשר

$$T_{C\leftarrow B} = \left([b_1]_C \cdots [b_n]_C \right)$$

<u>תרגיל</u>: נתונים שני בסיסים של $\mathbb{R}^3$

$B = \{b_1, b_2, b_3\}$, $C = \{c_1, c_2, c_3\}$

כאשר

$$\bar{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \bar{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \bar{b}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{c}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{c}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

נתון $[\bar{u}]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. מצאו את $[\bar{u}]_C$

<u>פתרון</u>: לפי הנוסחה

$$[\bar{u}]_C = T_{C\leftarrow B} \cdot [\bar{u}]_B$$

כדי למצוא את $T_{C\leftarrow B}$ צריך לפתור

מערכת:

$$\begin{cases} (\bar{c}_1 \ \bar{c}_2 \ \bar{c}_3) \cdot \bar{x} = \bar{b}_1 \\ (\bar{c}_1 \ \bar{c}_2 \ \bar{c}_3) \cdot \bar{x} = \bar{b}_2 \\ (\bar{c}_1 \ \bar{c}_2 \ \bar{c}_3) \cdot \bar{x} = \bar{b}_3 \end{cases}$$

Scanned with CamScanner

מכיוון ש C_1, C_2, C_3 בסיס, למערכת יש פתרון יחיד לכן בדירוג נמשך לדרוג למטריצה היחידה I

כ"א בתהליך שאורך נקבל למצבים:

(נסמן ג' $C = (\bar{c}_1\ \bar{c}_2\ \bar{c}_3)$)

$$(C \mid \bar{b}_1) \to \dots \to \left(I \mid \begin{matrix}\text{הנמוכה} \\ \text{הראשונה} \\ \text{של}\end{matrix} \ T_{C\leftarrow B}\right)$$

$$(C \mid \bar{b}_n) \to \dots \to \left(I \mid \begin{matrix}\text{הנמוכה} \\ \text{מס' ח של}\end{matrix} \ T_{C\leftarrow B}\right)$$

מכיוון שבדירוג מבצעים את אותן הפעולות האלמנטריות אפשר לסדר את כל המערכות בבת אחת:

$$(C \mid B) \to \dots \to (I \mid T_{C\leftarrow B})$$

<u>נמצוד לתרגיל</u>

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & -7 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{דירוג}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 7 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 7+3 & & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$T_{C\leftarrow B} = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & -2 \\ -4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[\bar{u}]_C = T_{C\leftarrow B} \cdot [\bar{u}]_B =$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & -2 \\ -4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 24 \\ -12 \end{pmatrix}$$

Scanned with CamScanner